Frenet 公式

对 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$，有 $\dot{\boldsymbol{t}}=\kappa\boldsymbol{n}$，$\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}$，现讨论由 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 的线性组合表示 $\dot{\boldsymbol{n}}$.

设 $\dot{\boldsymbol{n}}=a\boldsymbol{t}+b\boldsymbol{n}+c\boldsymbol{b}$，则 $\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}=a$. 而 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0$，两边对 s 求导，得

$$\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{t}}=\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}\cdot\kappa\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}+\kappa=0.$$

于是 $a=\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}=-\kappa$. 而 $b=\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{n}=0.c=\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{b}$，对 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 求导，与 a 的求法同理可得 $b=\tau$. 于是.

$$\dot{\boldsymbol{n}}=-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}.$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{t}}\\\dot{\boldsymbol{n}}\\\dot{\boldsymbol{b}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

上式称为 **Frenet 公式**. 这是一个一阶线性常微分方程组.

例 1. 平面曲线 C 的曲率 κ 是大于零的常数的充要条件是 C 是圆.

注. 因为只考虑曲线的局部性质，这里说的“圆”指的是圆的一部分.

证明. 已知圆的曲率是常数，下证必要性.

曲率中心的轨迹

$$\boldsymbol{r}^*(s)=\boldsymbol{s}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}(s),$$

对 s 求导，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}^*(s)=\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\boldsymbol{n}+\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{t}+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=0.$$

所以 $\boldsymbol{r}^*(s)$ 为常向量，设 $\boldsymbol{r}^*(s)=\boldsymbol{r}_0$，则

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}\qquad\Rightarrow\qquad|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=\frac{1}{\kappa}.$$

故 $\boldsymbol{r}$ 是以 $1/\kappa$ 为半径的圆. □